Kombinatorika in verjetnost

1 Kombinatorika

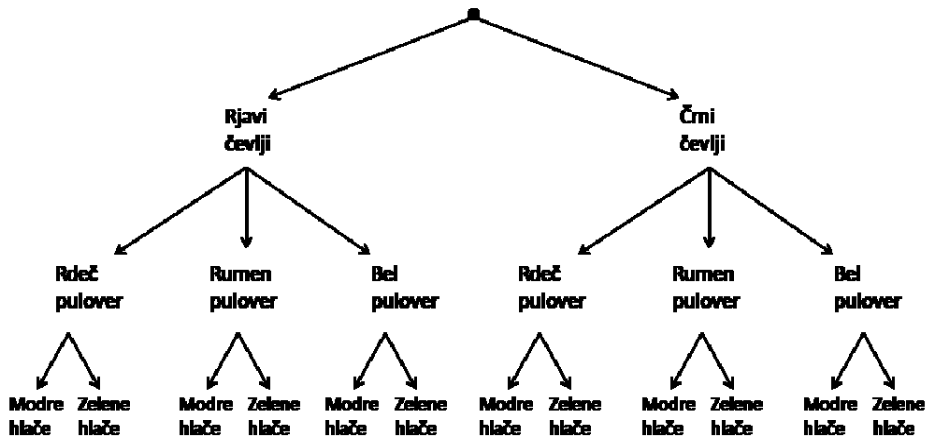
Kombinatorika je področje matematike, ki se ukvarja s tem, na koliko načinov je možno razporediti neko množico elementov ali na koliko načinov je možno izbrati elemente iz neke množice.

Spoznali bomo pravila, ki nam omogočajo, da razporeditve oziroma izbore preštejemo sistematično.

1.1 Kombinatorično drevo

S kombinatoričnim drevesom grafično prikažemo proces izbiranja odločitev. Drevo vseh možnosti narišemo tako, da vsako vozlišče razvejimo na toliko vozlišč, kolikor izbir imamo na voljo v danem koraku.

Zgled: V omari imamo 2 para čevljev (rjave in črne), 3 puloverja (rdeč, rumen in bel) in 2 hlače (zelene in modre). Koliko dni lahko hodimo različno oblečeni?
1. dan: rjavi čevlji, rdeč pulover, zelene hlače
2. dan: rjavi čevlji, rdeč pulover, modre hlače
... zadnji dan: črni čevlji, bel pulover, modre hlače.



Slika 1: Kombinatorično drevo k prejšnjemu zgledu

Število vseh možnih kombinacij dobimo tako, da preštejemo število listov v drevesu (to je število vozlišč na zadnjem nivoju). Ker pa drevo lahko postane preveliko, kombinatorika pozna še druga pravila za štetje in računanje kombinacij.

2 Osnovni izrek kombinatorike – pravilo produkta

Osnovni izrek kombinatorike govori o situaciji, ko naredimo dva ali več zaporednih izborov.

Zgled: Pripravljamo darilo za rojstni dan. Najprej izberemo eno od daril (čokolada, igrača, darilni bon), potem darilo zavijemo v eno od možnosti (škatla, darilna vrečka, darilni papir) in na koncu dodamo pentljo ene izmed barv (rdeča, modra, rumena). Koliko različnih daril imamo na voljo?

Pravilo produkta: Če najprej izbiramo med n_1 možnostmi, potem neodvisno od prvega izbora med n_2 možnostmi, potem neodvisno od prejšnjega izbora med n_3 možnostmi ... in nazadnje neodvisno od prejšnjega izbora med n_k možnostmi, potem imamo za sestavljeni izbor

$$P_n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

možnosti.

Pravilo vsote govori o situaciji, ko imamo dve ali več disjunktnih množic in izberemo en element iz ene izmed njih.

Zgled: Na kosilo gremo lahko v picerijo, ki ponuja 5 vrst pic, v mehiško restavracijo, ki ponuja 3 vrste tortilj, ali v italijansko restavracijo, ki ponuja 4 vrste testenin. Koliko različnih kosil imamo na voljo?

Pravilo vsote: Če se pri izbiranju odločimo ali za eno od n_1 možnosti iz prve množice ali za eno od n_2 možnosti iz druge množice ... ali za eno od n_k možnosti, imamo na voljo

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

možnosti.

3 Fakulteta

Produkt prvih n naravnih števil označujemo $n!$. To preberemo kot n *fakulteta* ali n *faktorsko*.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Fakultete naravnih števil naraščajo zelo hitro. Poglejmo fakultete prvih nekaj naravnih števil:

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \\
2! &= 2 \\
3! &= 6 \\
4! &= 24 \\
5! &= 120 \\
6! &= 720 \\
7! &= 5\,040 \\
8! &= 40\,320 \\
9! &= 362\,880
\end{aligned}$$

4 Permutacije

Permutacije so razporeditve vseh elementov dane množice v vrsto.

Primer: Imamo 7 različnih knjig, 4 leposlovne in 3 priročnike. Na koliko načinov jih lahko zložimo na knjižno polico, če ni nobenih dodatnih pogojev in koliko, če naj knjige iste vrste stojijo skupaj?

Pravilo – Permutacije P_N: Na prvo mesto lahko postavimo kateregakoli izmed n elementov. Neodvisno od tega, kateri element smo postavili na prvo mesto, lahko na drugo mesto postavimo kateregakoli izmed preostalih $n-1$ elementov. Tako nadaljujemo do zadnjega mesta, za katerega ostane samo en element. Število vseh možnih razporeditev je torej:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Rešitev primera: Najprej, pri zlaganju brez omejitev, lahko na prvo mesto postavimo katerokoli izmed 7 knjig, na naslednje mesto katerokoli izmed preostalih 6 in tako naprej, torej je:

$$P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040.$$

Če pa naj bodo skupaj leposlovne, lahko te razporedimo na 4! načine, priročnike na 3! in še krat dve, saj lahko najprej postavimo leposlovne nato priročnike ali obratno.

$$P_4 \cdot P_3 \cdot 2 = 288.$$

5 Variacije

Tudi pri variacijah razporedimo elemente v vrsto, vendar pri tem ne porabimo nujno vseh elementov. Določeno imamo število, koliko elementov izmed vseh razporedimo. Govorimo o *variacijah n-elementov reda r*, brez oziroma s ponavljanjem.

Pravilo: Variacije brez ponavljanja V_n^r: Na prvo mesto lahko postavimo kateregakoli izmed n elementov. Neodvisno od tega, kateri element smo postavili na prvo mesto, lahko na drugo mesto postavimo kateregakoli izmed preostalih $n-1$ elementov. Tako nadaljujemo do r-tega mesta, na katerega lahko postavimo enega izmed preostalih $n-r+1$ elementov. Število vseh možnih razporeditev je torej:

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+2) \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Kadar elemente razporedimo v vrsto in imamo na voljo poljubno število ponovitev posameznega elementa, temu rečemo variacije s ponavljanjem.

Pravilo: Variacije s ponavljanjem ${}_{(p)}V_n^r$: Določeno imamo število različnih elementov n in število mest, r, na katera razporedimo elemente. Na vsako od mest lahko postavimo kateregakoli od elementov, ker imamo na voljo poljubno število ponovitev, zato je formula za izračun vseh kombinacij enaka:

$${}_{(p)}V_n^r = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^r.$$

Pri variacijah s ponavljanjem število ponovitev ni omejeno, imamo pa določeno število mest, na katera elemente razporedimo. Različnih elementov je lahko več ali manj kot mest, medtem ko pri variacijah brez ponavljanja število elementov mora biti večje (ali enako) od števila mest.

Zgled: Na telefonu želiš nastavitvi štirimestno številsko šifro. Koliko možnosti imaš, če se števke lahko ponavljajo in koliko, če želiš, da so vse štiri števke različne.
Rešitev: Če se števke lahko ponavljajo, lahko na vsako izmed štirih mest postaviš katerokoli števko in imaš:

$${}_{(p)}V_{10}^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

možnosti.

Če pa želiš same različne števke, lahko na prvo mesto postaviš katerokoli izmed desetih števk, na naslednje mesto katerokoli izmed preostalih devetih, na tretje eno izmed osmih,...: in imaš:

$$V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

možnosti.

6 Kombinacije

Kadar vrstni red elementov, ki jih izberemo iz množice, ni pomemben, temu rečemo kombinacije. Še drugače, kombinacije so podmnožice dane množice. Določeno imamo število različnih elementov, n in število r, elementov izberemo. Vendar vrstni red elementov pri tem ni pomemben.

Pravilo: Kombinacije C_n^r: Izbiranje n elementov iz množice z n elementi so kombinacije. n elementov reda r;

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}.$$

Tej vrsti izbora rečemo tudi kombinacije brez ponavljanja.

Zgled: Imamo 7 vrst sadja. Koliko različnih sadnih solat s 4 vrstami sadja lahko naredimo?

Rešitev: Imamo kombinacije 7 7-mih elementov reda 4:

$$C_7^4 = 35.$$

7 Binomski simbol

Izraz, s katerim računamo kombinacije,

$$\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

lahko zapišemo še drugače:

$$\binom{a}{b}.$$

Temu simbolu rečemo binomski simbol. Preberemo ga "n nad r". Pove nam, koliko podmnožic moči r ima množica z močjo n.

Vrednosti binomskega simbola lahko enostavno brez računanja preberemo iz Pascalovega trikotnika.

							1								$n=0$
						1		1							$n=1$
					1		2		1						$n=2$
				1		3		3		1					$n=3$
			1		4		6		4		1				$n=4$
		1		5		10		10		5		1			$n=5$
	1		6		15		20		15		6		1		$n=6$
1		7		21		35		35		21		7		1	$n=7$

Slika 2: Pascalov trikotnik

7.1 Binomski izrek

Z uporabo binomskega simbola lahko zapišemo potenco vsote ali razlike dvočlenika (binoma) z naravnim eksponentom; $(a \pm b)^n$.

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$\begin{aligned}(a-b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 - \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - (-1)^r \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \\ &\quad (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} a^0 b^n\end{aligned}$$

Posebna primera za kvadrat in kub dvočlenika že poznamo iz prvega letnika.

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= 1a^2 \pm 2ab + 1b^2 \\ (a \pm b)^3 &= 1a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm 1b^3\end{aligned}$$

8 Verjetnost

8.1 Osnovni pojmi

Poskus je vsako dejanje, ki ga opravimo pod pod točno določenimi pogoji, naprimer:

- vržemo igralno kocko
- iz kompleta kart izvlečemo eno karto
- kupimo srečko na loteriji

Izid ali pojav, ki se pri takem poskusu lahko zgodi ali pa tudi ne imenujemo *dogodek*. Pri zgornjih poskusih, so tako možni dogodki:

- kocka se ustavi tako, da je na zgornji ploskvi šest pik (pade šestica), pade liho število pik,...
- Izvlečena karta je as, izvlečena karta je rdeče barve, izvlečena karta je pik.
- Srečka zadane.

Pri tem razlikujemo med:

- Dogodek je *gotov*, če se zgodi pri vsaki ponovitvi poskus. Njegova verjetnost je 1.
- Dogodek je *nemogoč*, če se ne zgodi pri nobeni ponovitvi poskusa. Njegova verjetnost je 0.
- Dogodek je *slučajen*, če se pri nekaterih ponovitvah zgodi, pri nekaterih pa ne. Njegova verjetnost je realno število med 0 in 1. Lahko jo izrazimo tudi v odstotkih.

Popoln sistem elementarnih dogodkov je sestavljen iz med seboj nezdružljivih dogodkov.

Zgled: Za primer si vzemimo *poskus*, pri katerem hkrati vržemo dve igralni kocki. Med igralnima kockama ne razlikujemo, zato so vsi možni izidi – *elementarni dogodki* v spodnji tabeli:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5,	1,5
	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
		3,3	3,4	3,5	3,6
			4,4	4,5	4,6
				5,5	5,6
					6,6

Dogodke sestavljamo skupaj iz elementarnih dogodkov, naprimer:

- dogodek A, da pade sodo število pik,
- dogodek B, da pade več kot 5 pik,
- dogodek C, da pade enako število pik na obeh kockah.

Za to, da se zgodi naprimer dogodek A, mora pasti (2,2), (2,4), (2,6), (4,4), (4,6) in (6,6). Za te elementarne dogodke bomo rekli, da so ugodni za to, da se zgodi dogodek A.

8.2 Verjetnost dogodka

Definicija: *Verjetnost dogodka* A, $P(A)$, definiramo kot količnik med vsemi ugodnimi elementarnimi dogodki m, da se zgodi dogodek A in vsemi možnimi elementarnimi dogodki n:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Zgled: Vrnimo se na prejšnji primer *poskusa*, pri katerem hkrati vržemo dve igralni kocki. Vseh možnih elementarnih dogodkov je 21 in so predstavljeni spodnji tabeli:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5,	1,5
	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
		3,3	3,4	3,5	3,6
			4,4	4,5	4,6
				5,5	5,6
					6,6

Ugodne dogodke za to, da se zgodi posamezen dogodek enostavno preštejemo. Verjetnosti dogodkov:

- dogodek A, da pade sodo število pik,

$$P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \doteq 0,28 = 28\%$$

- dogodek B, da pade več kot 5 pik,

$$P(B) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \doteq 0,71 = 71\%$$

- dogodek C, da pade enako število pik na obeh kockah.

$$P(C) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \doteq 0,28 = 28\%$$

V nadaljevanju je še nekaj primerov.

Primer 1: V škatli je 5 belih in 7 rdečih kroglic. Na slepo izvlečemo 2. Določi verjetnosti dogodkov.

1. Dogodek A, da sta obe kroglici iste barve.
   Rešitev: V škatli je 12 kroglic. Dve lahko izberemo na $\binom{12}{2} = 66$ načinov. Torej je vseh možnih elementarnih dogodkov $n = 66$. Za dogodek A sta ugodna elementarna dogodka, da sta obe kroglici beli, to je $\binom{5}{2}$ **ali**[1] obe rdeči, $\binom{5}{2}$ možnosti. Tako je verjetnost dogodka A:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} \doteq 0,47$$

2. Dogodek B, da sta izvlečeni kroglici različnih barv.
   Rešitev: V tem primeru mora biti natanko ena kroglica bela **in** ena rdeča. To lahko naredimo na $\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{1}$ načinov. in zato verjetnost dogodka B:

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} \doteq 0,53$$

[1] veznik in lahko zamenjamo s $\times$, ali pa s $+$

3. Dogodek C, da je vsaj ena izvlečena kroglica bela:
   Rešitev: Dogodek C se zgodi, če sta obe izvlečeni kroglici beli, $\binom{4}{2}$ načinov **ali** ena bela **in** ena rdeča, $\binom{5}{1} \times \binom{7}{1}$ načinov.
   $$P(C) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{1} \times \binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} \doteq 0,62$$

Primer 2:
Za srečelov na gasilski veselici so natisnili 500 srečk od katerih jih 300 zadane nagrado. Poišči verjetnosti dogodkov:

1. Dogodek A - kupim eno srečko. kolikšna je verjetnost, da sem zadel?
   Rešitev: Elementarni dogodek je kupljena srečka, torej 500 možnosti, od tega 300 ugodnih.
   $$P(A) = \frac{300}{500} \doteq 0,6$$
2. Dogodek B – kupim dve srečki, obe zadaneta.
   Rešitev:
   $$P(B) = \frac{\binom{300}{2}}{\binom{500}{2}} \doteq 0,84$$
3. Dogodek C – kupim dve srečki, zadane vsaj ena.
   Rešitev:
   $$P(C) = \frac{\binom{300}{1} \cdot \binom{200}{1} + \binom{300}{2} \cdot \binom{200}{0}}{\binom{500}{2}} \doteq 0,36$$
   Tu bi lažje izračunali verjetnost dogodku C *nasprotnemu dogodku* C'. Nasprotje temu, da zadane vsaj ena je, da **ne zadane nobena**. Torej moramo izmed 200-tih, ki ne zadanejo izbrati obe, kar lahko naredimo na $\binom{300}{2}$ načinov. Vsota verjetnosti dogodka in njemu nasprotnega dogodka je 1, torej:
   $$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(C') \\ &= \frac{\binom{200}{2}}{\binom{500}{2}} \\ &= 0,84. \end{aligned}$$

   Primer 3:
   Slovenski Loto; izžreba se 7 številk izmed števil od 1 do 39. Vplačam eno kombinacijo (7 števil). Kolikšna je verjetnost dobitka dogodek A?
   Rešitev: Ugodni dogodek je le eden, da so izžrebane vse moje številke. Vseh možnih kombinacij pa je $\binom{39}{7}$.
   $$P(A) = \frac{1}{\binom{39}{7}} = \frac{1}{15\,380\,937}.$$
   V takšnem primeru ponavadi rečemo kar, da imam 1 proti 15 380 937 možnosti.