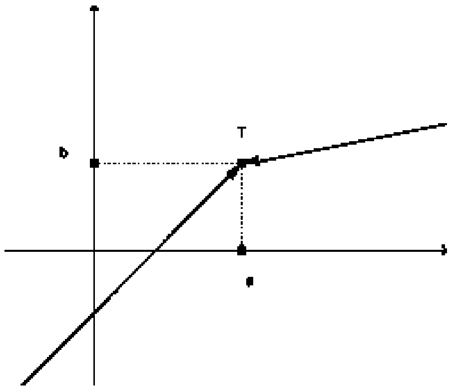
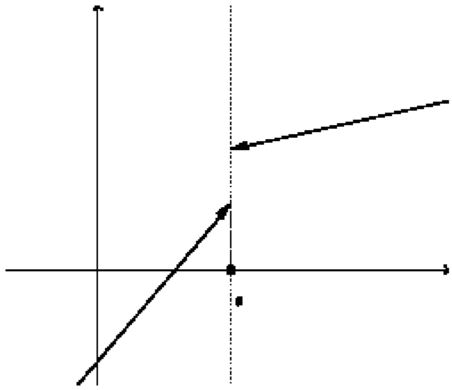
Limita funkcije

1 Limita

Limita funkcije je število b, proti kateremu gredo funkcijske vrednosti, če gredo vrednosti neodvisne spremenljivke proti a.

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$





Na levi sliki vidimo, da ko se vrednosti x bližajo a, se vrednosti $f(x)$ bližajo b. Limita obstaja. Na desni sliki pa to ni res. Ko se vrednosti x bližajo a, se vrednosti $f(x)$ bližajo dvema različnima točkama. Limita ne obstaja.

2 Pravila za računanje limit

Za računanje limite funkcije veljajo sledeča pravila:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} c &= c \\
\lim_{x \to a} c \cdot f(x) &= c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\
\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \\
\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}
\end{aligned}$$

3 Seznam najpogostejših limit

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} c &= c \\
\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} &= 0 \\
\lim_{x \to \infty} x &= \infty \\
\lim_{x \to \infty} a^x &= 0, \quad \text{če } -1 < a < 1 \\
\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

4 Računanje limit

Limite računamo na naslednji način:

1. Najprej v limito vstavimo namesto x vrednost, h kateri se x približuje.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x+1}{x+2}=\frac{13}{4}$$

   Če dobimo rezultat, smo končali.

2. Če dobimo $\frac{0}{0}$, potem moramo uporabiti katerega od naslednjih trikov:

   (a) Števec in imenovalec razstavimo in okrajšamo. Potem spet vstavimo vrednost v limito.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}=-1$$

   (b) Če nastopa v ulomku koren v razliki, potem racionaliziramo. Potem zopet poskusimo z vstavljanjem vrednosti.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

5 Neskončna limita

Do zdaj smo obravnavali dve možnosti, ki ju dobimo pri računanju limite, definirano vrednost in $\frac{0}{0}$. Zdaj pa razložimo še, kaj pomeni $\frac{a}{0}$.

Poglejmo $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$. Če namesto x vstavimo 2, dobimo $\frac{1}{0}$. Ko se vrednost x bliža vrednosti 2, vrednost ulomka $\frac{1}{(x-2)^2}$ raste čez vse meje. Funkcija $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ ima v točki $x=2$ pol druge stopnje in se njen graf približuje navpični asimptoti. Dobimo neskončno limito:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty.$$

Če ima izraz, katerega limito iščemo, negativen predznak, potem je limita tega izraza $-\infty$.

$$\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)=-\infty.$$

Funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ pa ko gre x proti 0 nima limite! Funkcija sicer ima navpično asimptoto $x=0$, a grejo vrednosti funkcije levo od nje proti $-\infty$, desno od asimptote pa proti $+\infty$. Zato limita $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ne obstaja.

6 Limita v neskončnosti

Do zdaj smo gledali limite, ko gre $x\to a$ k nekemu realnemu, ponavadi dosti majhnemu številu a. Kaj pa, ko x raste v neskončnost?

Poglejmo limito $\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x-1})$. V to limito ne moremo kar vstaviti ∞. Oglejmo si obnašanje funkcije, ko x raste. Izraz $\frac{x}{x-1}$ je vedno bližje 1, nikoli pa 1 ne doseže, ker je števec večji od imenovalca:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x-1}) = 1$$

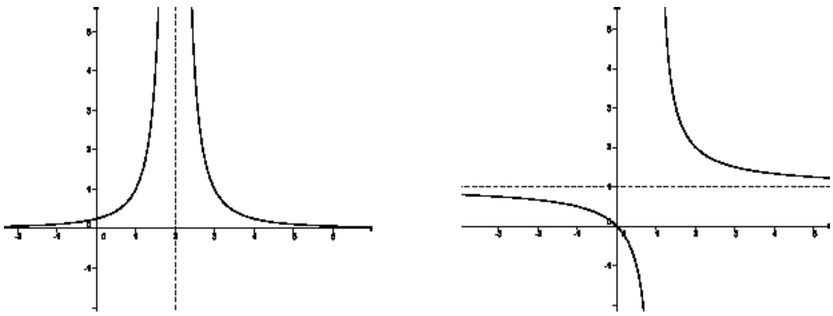
Limito v neskončnosti računamo na naslednji način:

1. $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}) = 0$.
2. Kadar imamo ulomek, delimo z največjo potenco x.
3. Če nastopa v ulomku koren v razliki, potem racionaliziramo.

7 Asimptote funkcij

Limita grafično predstavlja premico. Kadar imamo neskončno limito, je to navpična premica. Graf funkcije se premici približuje, ko y raste čez vse meje. Tej premici rečemo tudi navpična asimptota (ali pol, kot jo imenujemo pri racionalnih funkcijah).

Kadar govorimo o limiti v neskončnosti, je premica vodoravna. Graf funkcije se premici približuje, ko x raste čez vse meje. Govorimo o vodoravni asimptoti.



8 Odvod

8.1 Naklonski kot in smerni koeficient premice

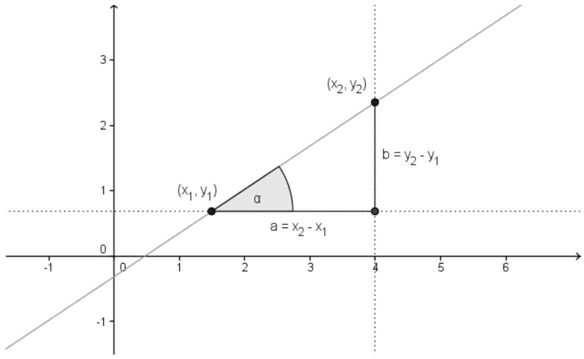
Naklonski kot α in smerni koeficient k nam povesta strmino premice.

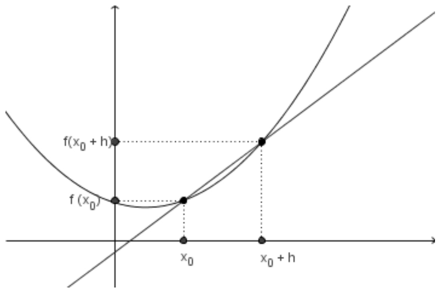
Naklonski kot α premice izračunamo iz definicije tangensa kota. Hkrati pa ista formula velja za smerni koeficient k premice. Obe količini sta torej povezani.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

Pri premici je strmina enaka za celo premico, zato je vseeno, kateri dve točki na premici vzamemo, da izračunamo k oziroma α. Pri krivuljah, ki niso premice, pa to ne velja. Kako izračunamo strmino poljubne krivulje, si bomo ogledali v nadaljevanju.

Kadar imamo krivuljo, ki ni premica, naklonskega kota in smernega koeficienta ne moremo izračunati za celo krivuljo. Lahko pa izračunamo naklonski kot in smerni koeficient premice, ki poteka skozi dve bližnji točki na krivulji. Izberemo si števili x_0 in $x_0 + h$, določimo pripadajoči točki na krivulji, ju povežemo s premico in tako dobimo približen naklon krivulje med izbranima točkama.





Izrazu $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ rečemo diferenčni količnik. Predstavlja smerni koeficient sekante skozi dve točki na krivulji $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Pomembno je, da je h majhen, saj tako dobimo premico, ki je zelo blizu krivulje in zato približno opiše strmino krivulje med dvema točkama. Zanima pa nas ne samo približen naklon krivulje med dvema točkama, ampak točen naklon krivulje v neki točki.

Če h manjšamo, se točki vedno bolj približujeta in ko je $h = 0$, točki sovpadata. Manjšaje h izrazimo z limito diferenčnega količnika.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Če ta limita obstaja, jo označimo z $f'(x_0)$ in ji rečemo odvod funkcije f v točki x_0.

Vemo že, da diferenčni količnik predstavlja naklon premice med dvema točkama oziroma približen naklon funkcije med tema dvema točkama. Ko h manjšamo, se točki, skozi kateri poteka sekanta, približujeta in ko je $h = 0$, točki sovpadata. Premica sekanta postane tangenta na funkcijo v dani točki, limita diferenčnega količnika pa je enaka *odvodu* funkcije v tej točki.

Vrednost odvoda funkcije v dani točki je torej enaka smernemu koeficientu tangente na krivuljo v dani točki. To pomeni, da odvod funkcije pove, kakšen je naklon krivulje v dani točki.

8.2 Odvod funkcije

Denimo, da imamo funkcijo, kateri lahko izračunamo odvod v poljubni vrednosti neodvisne spremenljivke iz definicijskega območje. Potem je predpis, ki vsaki vrednosti x priredi vrednost odvoda funkcije f v točki x, ki jo imenujemo odvod funkcije f in označimo t $f'(x)$. Ker je odvod $f'(x)$ tudi funkcija, lahko narišemo njen graf. Graf odvoda ponazarja, kako se naklon funkcije $f(x)$ spreminja, ko spreminjamo x.

8.3 Odvajanje funkcij po definiciji

Vzemimo funkcijo $f(x) = x^3$ in izračunajmo njen odvod po definiciji. Definicija odvoda:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Namesto $f(x)$ in $f(x+h)$ vstavimo dano funkcijo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

Izračunamo števec ulomka:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

Odštejemo in delimo s h:

$$\lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) =$$

Izračunamo limito (vstavimo $h = 0$ v izraz):

$$= 3x^2$$

Dobili smo rezultat, odvod funkcije $f(x) = x^3$ je $f'(x) = 3x^2$.

8.4 Odvodi elementarnih funkcij

Po definiciji lahko izračunamo odvode vseh funkcij, vendar si za hitrejše računanje kar zapomnimo odvode elementarnih funkcij.

	Funkcija	**Odvod**
Konstanta	$y = c$	$y' = 0$
Linearna funkcija	$y = x$	$y' = 1$
Potenčna funkcija	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
Kotne funkcije		
Sinus	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
Kosinus	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
Tanges	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
Kotangens	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Eksponentna funkcija		
Eksponentna funkcija	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
e^x	$y = e^x$	$y' = e^x$
Logaritem		
Logaritem	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
Naravni logaritem	$y' = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$

8.5 Pravila za odvajanje

1. Produkt funkcije s konstanto:
$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$
2. Odvod vsote:
$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$
3. Odvod razlike:
$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

4. Odvod produkt:
$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

5. Odvod količnika:
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

6. Odvod posredne funkcije:
$$[f\,(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

9 Uporaba odvoda

9.1 Kot med grafom funkcije in abscisno osjo

Kot med grafom funkcije in abscisno osjo je kar naklonski kot tangente na graf funkcije v presečišču grafa funkcije in abscisno osjo.

Torej, če je x_0 ničla funkcije f, je smerni količnik tangente na graf v presečišču enak odvodu funkcije v točki x_0; $f'(x_0)$, in zato kot med abscisno osjo in grafom funkcije f naklonski kot tangente in velja:

$$\operatorname{tg}\alpha = k = f'(x_0).$$

9.2 Kot med dvema krivuljama

Kot med grafoma dveh funkcij definiramo kot kot med tangentama na grafa obeh funkcij v presečišču. Denimo, da se grafa dveh funkcij $f(x)$ in $g(x)$ sečeta v točki z absciso x_0. Smerna količnika tangent sta enaka vrednosti odvodov v točki x_0:

$$\begin{aligned} k_f &= f'(x_0) \\ k_g &= g'(x_0) \end{aligned}$$

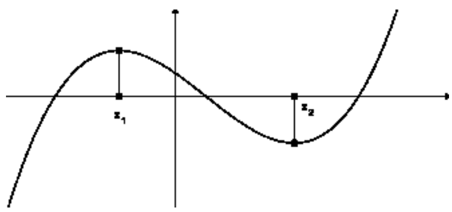
Kot izračunamo po obrazcu:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_f - k_g}{1 + k_f\cdot k_g}\right|.$$

9.3 Naraščanje in padanje

Funkcija narašča, če iz $x_2 > x_1$ sledi $f(x_2) > f(x_1)$.
Funkcija pada, če iz $x_2 > x_1$ sledi $f(x_2) < f(x_1)$.

Iz grafa funkcije lahko razberemo naraščanje in padanje funkcije.



Funkcija narašča za $x < x_1$ in $x > x_2$ in pada za $x_1 < x < x_2$.

Če pa grafa funkcije ne poznamo, lahko naraščanje in padanje funkcije ugotovimo z odvodom.

- Funkcija je naraščajoča za tiste x, za katere je $f'(x) > 0$.
- Funkcija je padajoča za tiste x, za katere je $f'(x) < 0$.

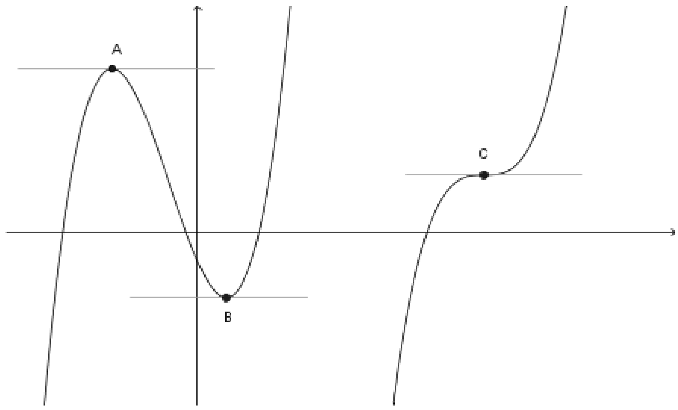
9.4 Stacionarne točke

Stacionarne točke so točke na krivulji, v katerih je odvod funkcije enak nič

$$f'(x) = 0.$$

To pomeni, da je smerni koeficient tangente enak 0, kar pomeni, da je tangenta v taki točki vzporedna z abscisno osjo.

Na sliki poglejmo, kakšne so možne stacionarne točke.



9.5 Ekstremi

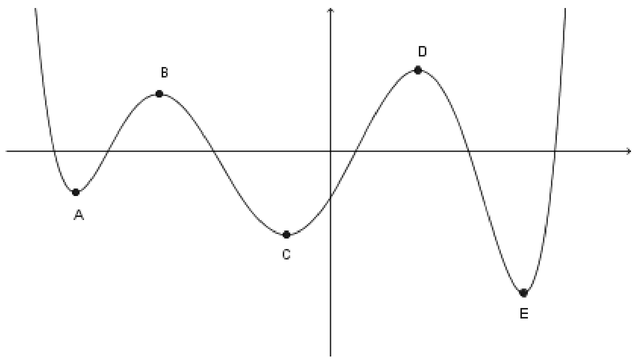
Največje (maksimum) in najmanjše (minimum) vrednosti funkcije s skupno besedo imenujemo *ekstremi* funkcije. Grafično jih prepoznamo kot "vrhove"in "doline"na grafu, formalno pa ekstreme definiramo takole:

- V točki x_0 je *lokalni maksimum* funkcije f, če obstaja okolica U točke x_0, da velja $f(x) \leq f(x_0)$ za vsak $x \in U$.
- V točki x_0 je *lokalni minimum* funkcije f, če obstaja okolica U točke x_0, da velja $f(x) \geq f(x_0)$ za vsak $x \in U$.

Funkcija ima lahko več lokalnih maksimumov in minimumov ampak samo en *globalni maksimum* in en *globalni minimum.* Ta dva definiramo takole:

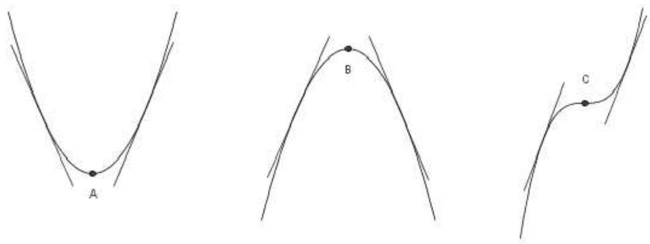
- V točki x_0 je *globalni maksimum* funkcije f, če velja $f(x) \leq f(x_0)$ za vsak x.
- V točki x_0 je *globalni mminimum* funkcije f, če velja $f(x) \geq f(x_0)$ za vsak x.

Točke A, C in E so lokalni minimumi, točki B in D sta lokalna maksimuma. Točka E je globalni minimum.



9.6 Ekstremi med stacionarnimi točkami

Poglejmo, kako računsko določimo minimume in maksimume med stacionarnimi točkami.



- V točki A je minimum. Levo od točke A funkcija pada, desno pa narašča. Z odvodom to definiramo takole:

  Če je levo od x_0 odvod funkcije $f'(x)$ negativen, desno pa pozitiven, potem je v x_0 lokalni maksimum funkcije.

- V točki B je maksimum. Levo od točke B funkcija narašča, desno pa pada:

  Če je levo od x_0 odvod funkcije $f'(x)$ pozitiven, desno pa negativen, potem je v x_0 lokalni maksimum funkcije.

- V točki C ni ne minimum ne maksimum. Levo in desno od točke C funkcija narašča:

  Če je levo in desno od x_0 odvod funkcije $f'(x)$ enako predznačen (obakrat negativen ali obakrat pozitiven), potem v x_0 ni lokalnega ekstrema.

PRIMER:
Funkciji $f(x) = (x-2)(x+1)^2$ določi ničle, začetno vrednost in lokalne ekstreme ter ji nariši graf!

Ničle:

$x_1 = -1$; 2. stopnje

$x_2 = 2$; 1. stopnje

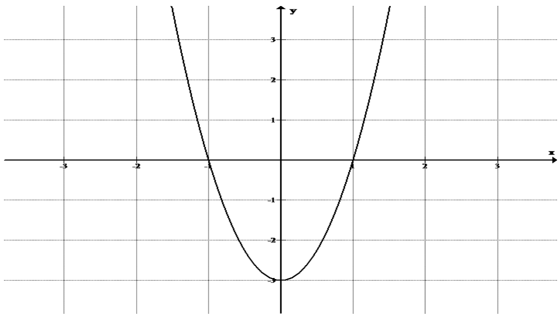
Odpravimo oklepaje: $f(x) = (x-2)(x^2+2x+1) = x^3 - 3x - 2$;

Začetna vrednost: $f(0) = -2$

Lokalni ekstremi: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3, \text{ odvod izenačimo z nič:} \\ 3x^2 - 3 &= 0 \text{ rešimo enačbo} \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

Torej sta rešitvi: $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$, to sta stacionarni točki. Ali je v stacionarni točki lokalni ekstrem in kateri je (ali maksimum ali minimum), najlažje ugotovimo, če si skiciramo graf odvoda; to je parabola. Ker je vodilni koeficient a 3 pozitiven, je njeno teme najnižja točka, parabola pa seka abscisno os v ničlah $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$:



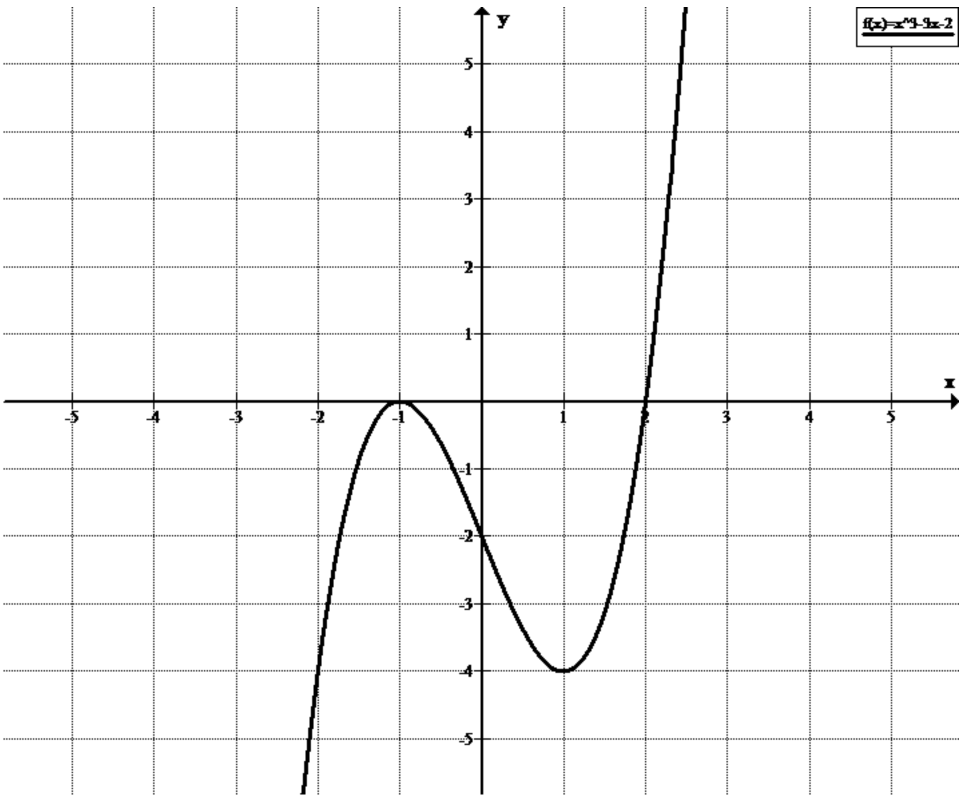
Pred stacionarno točko $x_1 = -1$, je odvod $f'(x)$ pozitiven, zato funkcija $f(x)$ narašča, po -1 pa je odvod negativen in funkcija $f(x)$ pada, torej je $x_1 = -1$ **lokalni maksimum**. V $x_2 = 1$ pa se zgodi ravno obratno, zato nastopi **lokalni minimum**.

V $x_1 = -1$ ima funkcija $f(x)$ ničlo druge stopnje, zato se graf dotakne abscisne osi "od spodaj"in nam ordinate točke na grafu ni potrebno izračunati.

V $x_2 = 1$ pa moramo še izračunati ordinato točke na grafu funkcije f;

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 - 2 = -4$$

Torej gre graf funkcije f skozi točko $(1, -4)$.


f(x)=x^3-3x-2
y
x
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5