Elementarne funkcije

1 Funkcija

Definicija: 1 *Funkcija* f je je predpis, ki vsakemu elementu množice A priredi natanko določen element množice B.

Množica A je *definicijsko območje* funkcije f ($D_f = A$), množica vseh slik pa njena *zaloga vrednosti*; $Z_f = \{y \in B;\ y = f(x), x \in D_f\}$. Zaloga vrednosti je v splošnem podmnožica množice B.

V tem besedilu se omejim le na realne funkcije ene realne spremenljivke tako, da je množica s katere funkcija slika ustrezna podmnožica realnih števil, množica na katero funkcija slika pa kar množica realnih števil.

Definicija: 2 *Graf* funkcije je množica vseh točk v pravokotnem koordinatnem sistemu, ki imajo za absciso vrednost neodvisne spremenljivke x, za ordinato pa njeno sliko $f(x)$;

$$\Gamma_f = \{(x, y);\ y = f(x), \forall x \in D_f\}.$$

Definicija: 3 *Ničla* funkcije je vrednost neodvisne spremenljivke x_0, katere vrednost funkcije $f(x_0)$ je enaka 0.

V ničli graf funkcije seka (oz. se dotika) abscisno os.

Definicija: 4 *Začetna vrednost* funkcije je vrednost funkcije v $x = 0$; $f(0)$.

V začetni vrednosti graf funkcije seka ordinatno os.

1.1 Lastnosti funkcij

Definicija: 5 Funkcije $f : A \to B$ je *surjektivna*, če je njena zaloga vrednosti enaka množici B; $Z_f = B$.

Če vsaka vzporednica abscisne osi seka graf funkcije **vsaj** enkrat, je funkcija surjektivna.

Definicija: 6 Funkcije $f : A \to B$ je *injektivna*, če imata poljubna različna originala različni sliki;

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b,\ \forall a, b \in D_f.$$

Če vsaka vzporednica abscisne osi seka graf funkcije **kvečjemu** enkrat, je funkcija injektivna.

Funkcija je *bijektivna*, če je surjektivna in injektivna hkrati. Vsaka vzporednica abscisni osi seka graf bijektivne funkcije **natanko** enkrat. Injektivni funkciji f lahko priredimo *inverzno funkcijo* f^{-1}, ki slikam prireja nazaj originale.

Definicija: 7 Inverzna funkcija f^{-1} k injektivni funkciji f je definirana s predpisom:

$$f^{-1}(x) = y \ \Leftrightarrow\ f(y) = x.$$

Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo, če graf funkcije f prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov (premico x=y).

1.1.1 Naraščanje, padanje

Definicija: 8 Funkcija f je na intervalu (a,b) *naraščajoča*, če za poljubna elementa x_1 in x_2 iz tega intervala velja:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_1).$$

Funkcija f je na intervalu (a,b) *padajoča*, če za poljubna elementa x_1 in x_2 iz tega intervala velja:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_1).$$

1.1.2 Omejenost

Definicija: 9 Funkcija f je *navzdol omejena*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D_f$.
Funkcija f je *navzgor omejena*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq m$ za vsak $x \in D_f$.
Funkcija je *omejena*, če je omejena navzdol in navzgor hkrati.

1.1.3 Sodost, lihost

Definicija: 10 Funkcija f je *soda*, če je vsak $x \in D_f$ $f(-x) = f(x)$.
Funkcija f je *liha*, če je vsak $x \in D_f$ $f(-x) = -f(x)$.

Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os, graf lihe pa glede na koordinatno izhodišče.

2 Linearna funkcija

Definicija: 11 *Linearna funkcija* je definirana s predpisom:

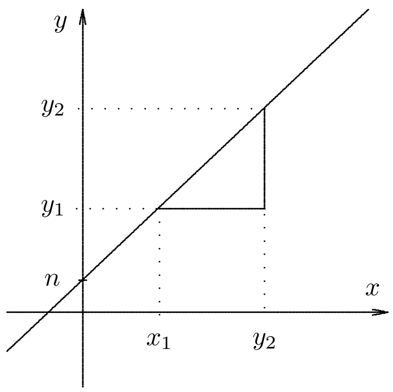
$$f(x) = kx + n\,,$$

kjer sta koeficienta k in n poljubni realni števili.

Linearna funkcija je definirana na celi množici realnih števil, njena zaloga vrednosti pa je tudi $\mathbb{R}$, razen v primeru, da je $k = 0$ in je funkcija $f(x) = n$ (to je konstantna funkcija), je njena zaloga vrednosti, le množica, ki za edini element vsebuje število n.

Graf linearne funkcije je premica!

Koeficient k imenujemo *smerni količnik* ali *diferenčni kvocient* in pove, kakšen je nagib (strmina) grafa. Koeficient n pa je *začetna vrednost* in pove, kje graf seka ordinatno os.



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (= \tan\varphi)$$

če je φ naklonski kot premice, t. j. kot med abscisno osjo in premico merjen v pozitivnem matematičnem smislu.

3 Potenčne funkcije

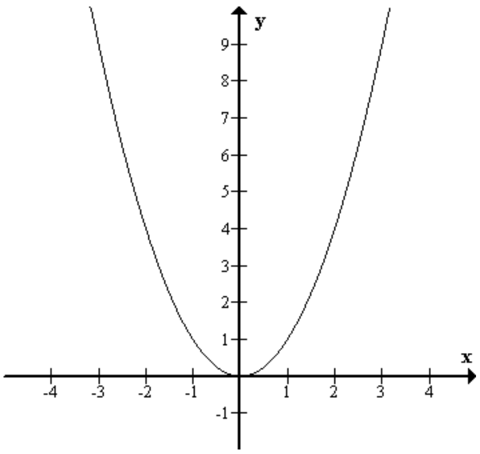
Definicija: 12 *Potenčna funkcija* je definirana s predpisom:

$$f(x) = x^m\,,$$

kjer je m poljubno celo število, razen 0 in 1.

Pri potenčnih funkcijah razlikujemo med štirimi možnostimi, glede to ali je eksponent m pozitivno sodo, pozitivno liho, negativno sodo ali negativno liho število.

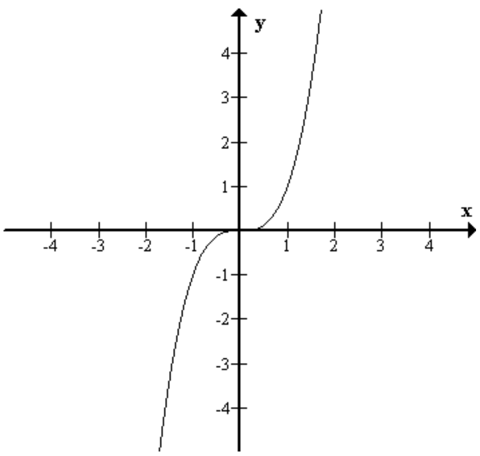
Za pozitiven sod eksponent n, npr.: $f(x) = x^2$



Lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = [0, \infty)$,
2. je soda,
3. narašča na $(0, \infty)$ in pada na $(-\infty, 0)$,
4. navzdol omejena z $y = 0$,
5. nenegativna,
6. ni injektivna, ne surjektivna.

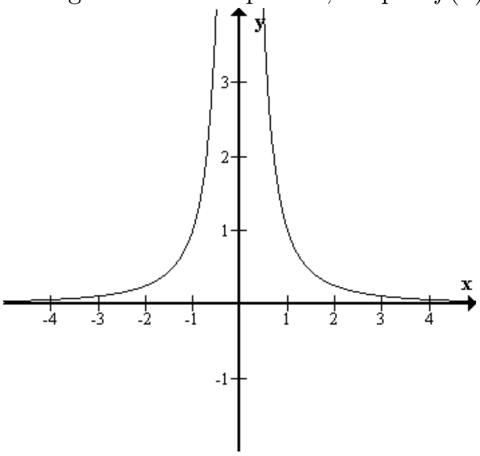
Za pozitiven lih eksponent, n npr.: $f(x) = x^3$



Lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = \mathbb{R}$,
2. je liha,
3. je naraščajoča,
4. ni omejena,
5. je bijektivna.

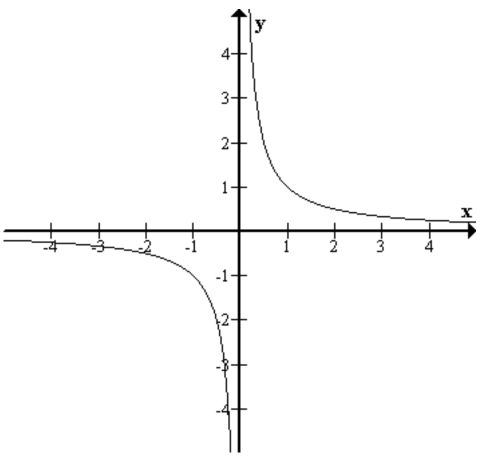
Za negativen sod eksponent, n npr.: $f(x) = x^{-2}$



Lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $Z_f = (0, \infty)$,
2. je soda,
3. narašča na $(-\infty, 0)$ in pada na $(0, \infty)$,
4. navzdol omejena z $y = 0$,
5. nenegativna,
6. ni injektivna, ne surjektivna.

Za negativen lih eksponent, n npr.: $f(x) = x^{-1}$



Lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $Z_f = \mathbb{R} - \{0\}$,
2. je liha,
3. je padajoča,
4. ni omejena,
5. je injektivna, ne pa surjektivna.

4 Kvadratna funkcija

Definicija: 13 *Kvadratna funkcija* je definirana s predpisom:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

kjer so a, b, c poljubna realna števil in $a \neq 0$.

Graf kvadratne funkcije je parabola.

Člen ax^2 imenujemo *kvadratni člen* in koeficient a *koeficient kvadratnega člena* ali tudi *vodilni člen.* Njegov predznak pove, ali je teme najnižja točka (minimum) parabole, če je a pozitiven oziroma najvišja točka na paraboli (maksimum), če je a negativen.

Člen bx je *linearni člen* in b *koeficient linearnega člena.* Člen c pa *prosti člen* ali *začetna vrednost* in pove, kje parabola seče ordinatno os.

Poleg *splošne oblike* kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, uporabljamo še *temensko obliko*:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q\,,$$

kjer je *teme* točka $T(p,q)$. Koordinati temena p in q lahko iz koeficientov splošne oblike a,b,c izračunamo z obrazcema:

$$p = -\frac{b}{2a}\,; \quad q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Kvadratno funkcijo, ki ima ničle lahko zapišemo tudi v *ničelni obliki* (tudi *razcepni*):

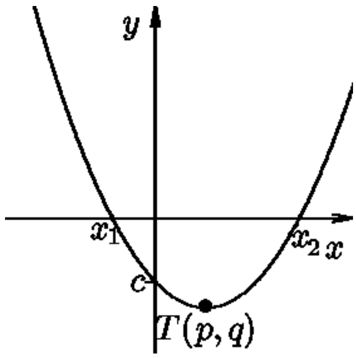
$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\,,$$

za ničli x_1, x_2, ki ju izračunamo po obrazcu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,; \quad D = b^2 - 4ac\,.$$

V primeru, da je diskriminanta $D > 0$ dobimo dve različni ničli, če je $D = 0$ sta ničli enaki – lahko rečemo, da ima funkcija eno samo ničlo. Če pa je $D < 0$ pa $\sqrt{D}$ ne obstaja, funkcija nima ničle in tudi ne ničelne oblike!

Definicijsko območje kvadratne funkcije je množica realnih števil, zaloga vrednosti pa je odvisna od ordinate temena q in predznaka vodilnega koeficienta a. Če je $a > 0$ je teme najnižja točka na paraboli, torej je funkcija navzdol omejena z $y = q$ in zaloga vrednosti funkcije interval $[q,\infty)$. Za $a < 0$, pa je q zgornja meja in zaloga vrednosti $(-\infty, q]$.



5 Eksponentna funkcija

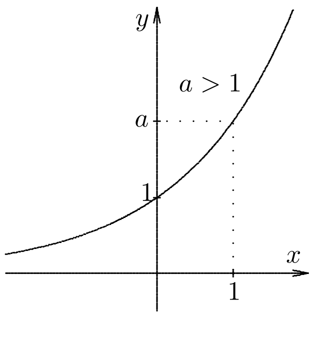
Definicija: 14 *Eksponentna funkcija* je definirana s predpisom:

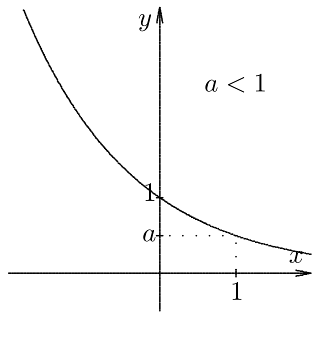
$$f(x) = a^x\,,$$

kjer je osnova a pozitivno realno število in $a \neq 1$.

Eksponentna funkcija je definirana za vsa realna števila, njena zaloga vrednosti pa je množica pozitivnih realnih števil.

Graf eksponentne funkcije je odvisen od osnove a:





Lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (0, \infty)$,
2. je naraščajoča za $a > 1$ in padajoča za $0 < a < 1$,
3. navzdol omejena z $y = 0$; abscisna os je vodoravna asimptota,
4. je injektivna.

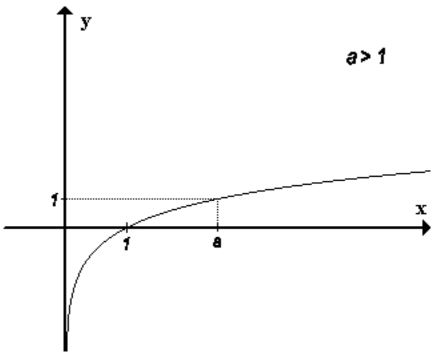
6 Logaritemska funkcija

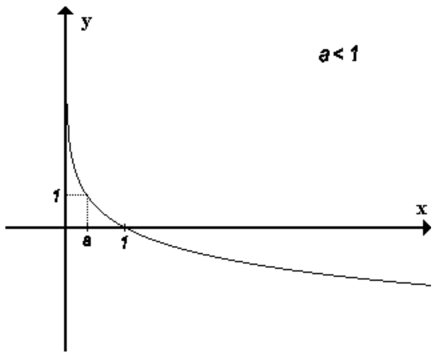
Definicija: 15 *Logaritemska funkcija* je inverzna funkcija eksponentni in je definirana s predpisom:

$$f(x) = \log_a x \Leftrightarrow a^{f(x)} = x$$

kjer je osnova logaritma a pozitivno realno število in $a \neq 1$.

Logaritemska funkcija je definirana na množici pozitivnih realnih števil, njena zaloga vrednosti pa je množica realnih števil. Graf Logaritemska funkcije je odvisen od osnove a:





Lastnosti:

1. $D_f = (0, \infty)$, $Z_f = \mathbb{R}$,
2. je naraščajoča za $a > 1$ in padajoča za $0 < a < 1$,
3. ni omejena,
4. ordinatna os je navpična asimptota,
5. je injektivna.

7 Polinom

Definicija: 16 *Polinom stopnje n* je funkcija definirana s predpisom:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

kjer so koeficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ realna števila in $a_n \neq 0$. Člen $a_n x^n$ je *vodilni člen*, a_0 pa *konstantni* ali *prosti člen* (tudi *začetna vrednost*).

7.1 Računanje s polinomi

Dva polinoma seštejemo (odštejemo) tako, da seštejemo (odštejemo) člene istih stopenj. Pri množenju množimo vsak člen z vsakim in seštejemo člene istih stopenj.

Za deljenje polinomov velja *osnovni izrek o deljenju*:

Izrek: 1 *Za polinoma $p(x)$ stopnje m in $q(x)$ stopnje n ($n \leq m$) obstajata natanko določena polinoma $k(x)$ in $r(x)$ da velja:*

$$p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x),$$

kjer je stopnja polinoma $r(x)$ manjša od $q(x)$ ali $r(x) = 0$.

Polinom $p(x)$ je deljenec, $q(x)$ delitelj, $k(x)$ količnik stopnje $m - n$ in $r(x)$ ostanek.

7.2 Ničle polinoma

Ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ z linearnim polinomom $x - c$, kjer je c realno število, je enak vrednosti polinoma $p(c)$;

$$p(x) = k(x) \cdot (x - c) + p(c).$$

Če je $p(c) = 0$, je število c *ničla* polinoma $p(x)$.

Če velja $p(x) = k(x) \cdot (x - c)^m$ in c ni ničla polinoma $k(x)$, je število c *ničla stopnje m.*

7.3 Osnovni izrek algebre

Izrek: 2 *Vsak nekonstanten polinom ima vsaj eno ničlo.*

Očitna posledica tega izreka je, da ima polinom $p(x)$ natanko toliko ničel, kot je njegova stopnja, pri čemer vsako ničlo štejemo tolikokrat, kot je njena stopnja. Polinom stopnje n torej lahko zapišemo v *ničelni obliki*: $p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$.

Opomba: Osnovni izrek algebre in njegova posledica veljata v množici kompleksnih, ne pa v množici realnih števil! Za realne ničle polinoma z realnimi koeficienti pa lahko rečemo, da ima kvečjemu toliko ničel kolikor je njegova stopnja. Ker kompleksne ničle takega polinoma nastopajo v (konjugiranih) parih, ima polinom lihe stopnje vsaj eno realno ničlo.

7.4 Iskanje ničel

Pri iskanje racionalnih ničel si lahko pomagamo z naslednjim izrekom:

Izrek: 3 *Če je okrajšani ulomek $\frac{c}{d}$ ničla polinoma $p(x)$ s celimi koeficienti, c deli konstantni člen, d pa vodilni koeficient.*

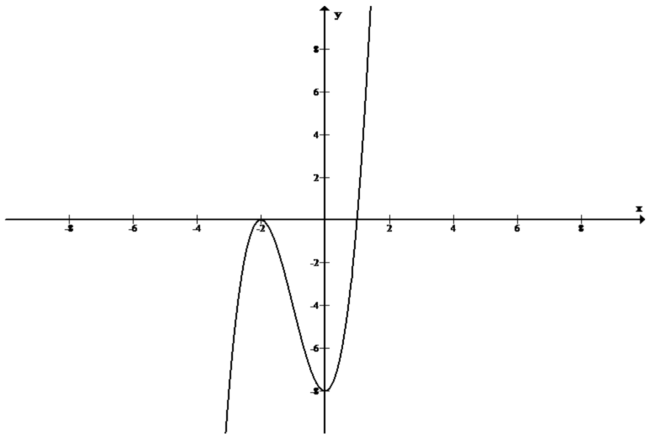
7.5 Graf polinoma

Pri risanju grafa polinoma upoštevamo:

1. Graf polinoma je nepretrgana krivulja.
2. Daleč od izhodišča se polinom vede kot njegov vodilni člen $a_n x^n$.
3. Polinom spremeni predznak le v ničlah lihe stopnje.

7.5.1 Zgled:

Nariši graf polinoma: $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$.
Najprej polinom zapišemo v obliki za ničle:
$p(x) = 2(x-1)(x+2)^2$!
Ničli:
$x_1 = 1$, 1. stopnje
$x_2 = -2$, 2. stopnje
(dvojnost ničle lahko označimo z zapisom: $x_{2,3}$)
Začetna vrednost:
$p(0) = -8$



8 Racionalna funkcija

Definicija: 17 *Racionalna funkcija* je količnik dveh polinomov:

$$q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

kjer so koeficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ in $b_n, b_{n-1}, \ldots b_1, b_0$ realna števila.

Pri obravnavi se omejimo na primere, kjer sta si polinoma v števcu in imenovalcu *tuja* to pomeni, da nimata skupnih ničel. Pri stopnjah pa se omejimo le na primere, kjer sta polinoma v števcu in imenovalcu iste stopnja ($m = n$) ali je stopnja polinoma v imenovalcu večja kot stopnja polinoma v števcu.

Ničle racionalne funkcije so ničle polinoma v števcu, ničle polinoma v imenovalcu pa *poli.* V polu ima graf racionalne funkcije navpično asimptoto.

Vedenje grafa racionalne funkcije pri prehodu čez ničlo in pol določa parnost (sodost, lihost) ničle danega polinoma.

- Pri prehodu čez ničlo *lihe* stopnje racionalna funkcija *spremeni* predznak, pri prehodu čez ničlo *sode* stopnje pa predznaka *ne spremeni.*
- Pri prehodu čez pol *lihe* stopnje racionalna funkcija *spremeni* predznak, pri prehodu čez pol *sode* stopnje pa predznaka *ne spremeni.*

Vedenje grafa racionalne funkcije daleč od izhodišča določa količnik vodilnih členov obeh polinomov:

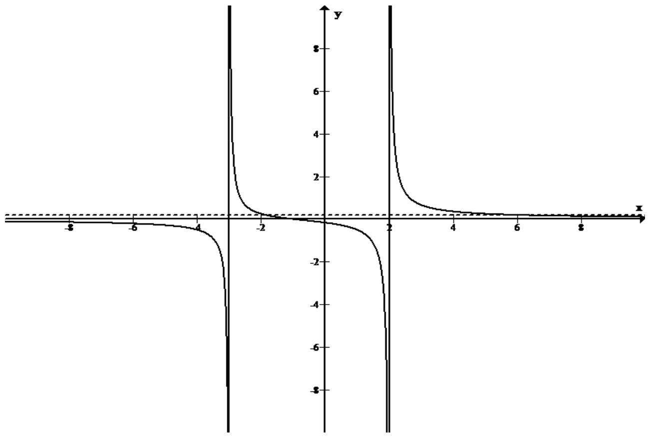
$$\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Graf se približuje *vodoravni asimptoti*, katere enačbo določimo:

- če sta stopnji polinomov v števcu in imenovalcu enaki (m=n) ima asimptota enačbo $y = \frac{a_n}{b_m}$,
- če pa je stopnja polinoma v števcu manjša kot v imenovalcu je asimptota abscisna os. Enačba $y = 0$.

8.0.2 Zgled:

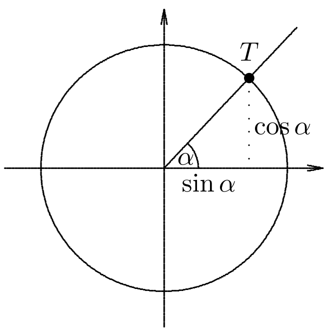
Nariši graf racionalne funkcije: $p(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$.
Ničla:
$x_1 = -1$ 1. stopnje
Poli: $x_1 = -3$ 1. stopnje
$x_1 = 2$ 1. stopnje
Začetna vrednost:
$p(0) = -8$
Vodoravna asimptota:
$y = 0$



9 Kotne funkcije

Enotska krožnica je krožnica s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom 1. Kote merimo od pozitivnega poltraka abscisne osi v pozitivnem matematičnem smislu za pozitivni in v negativnem smislu za negativne kote. Točka T, kjer drugi krak kota seka krožnico (prvi je vedno pozitivnega poltraka abscisne osi) kroži po njej.

Kotni funkciji *sinus* in *kosinus* definiramo kot koordinati točke $T(x, y)$ na enotski krožnici;



$$\begin{aligned} x &= \cos\alpha \\ y &= \sin\alpha \end{aligned}$$

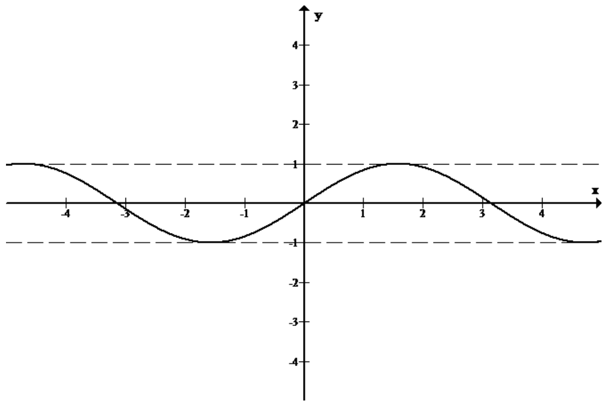
Pri kotnih funkcijah prvič srečamo še lastnost periodičnost.

Definicija: 18 Funkcija f je *periodična*, če obstaja realno število ω, da je:

$$f(x + \omega) = f(x),\ \forall x \in D_f.$$

Številu ω v tem primeru rečemo *perioda* funkcije f. Če je ω perioda, je perioda tudi število 2ω, 3ω,.... Najmanjše takšno število ω, ki izpolnjuje zahtevo iz definicije imenujemo *osnovna perioda.*

9.1 Funkcija sinus



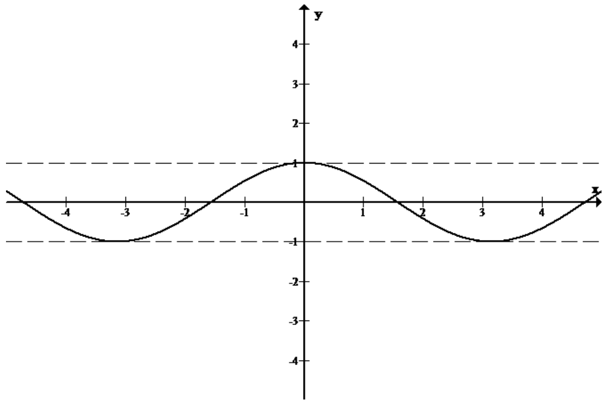
Lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = [-1, 1]$,
2. je liha,
3. intervali naraščanja $(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi)$, in padanja $(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi)$, za $\forall k \in \mathbb{Z}$,
4. omejena, navzdol z -1 in navzgor z 1,
5. Ničle: $x = k \cdot \pi$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$,
6. periodična s periodo $k \cdot 2\pi$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$ in osnovno periodo 2π.

9.2 Funkcija kosinus

Lastnosti:

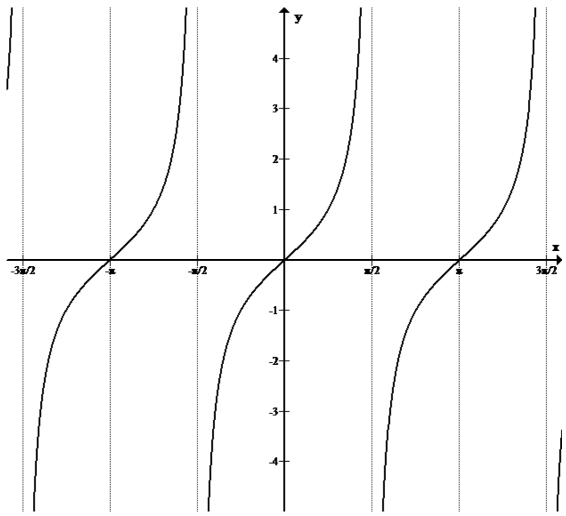
1. $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = [-1, 1]$,
2. je soda,
3. intervali naraščanja $(\pi + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi)$, in padanja $(0 + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi)$, za $\forall k \in \mathbb{Z}$,
4. omejena, navzdol z -1 in navzgor z 1,
5. Ničle: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$,
6. periodična s periodo $k \cdot 2\pi$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$ in osnovno periodo 2π.



9.3 Funkcija tangens

Lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \frac{\pi}{2};\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$, $Z_f = \mathbb{R}$,
2. je liha,
3. je naraščajoča (povsod na D_f)),
4. ni omejena,
5. Ničle: $x = k \cdot \pi$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$,
6. periodična s periodo $k \cdot \pi$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$ in osnovno periodo π.



9.4 Funkcija kotangens

Lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi;\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$, $Z_f = \mathbb{R}$,
2. je liha,
3. je padajoča (povsod na D_f)),
4. ni omejena,
5. Ničle: $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$,
6. periodična s periodo $k \cdot \pi$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$ in osnovno periodo π.